Министерство образования Российской Федерации

Ленинградский государственный аграрно-технологический колледж

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Интегральное исчисление

Ст. Ленинградская
2011г.

Предисловие.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений. Оно содержит достаточное количество примеров и задач, охватывающих один раздел программы - «Интегральное исчисление».

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту восстановить знания, полученные в школе по данной теме, и преодолеть трудности при изучении нового материала.

Это пособие поможет студенту овладеть материалом самостоятельно, так как в каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения и приёмы решения типовых задач, а так же дополнительные задания для закрепления. В конце пособия приведены примерные варианты контрольной работы.

Желаю успеха в усвоении данного раздела!

Пособие составлено преподавателем математики Ульяновой Т.В.

Неопределённый интеграл.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется выражение вида $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для заданной функции $f(x)$.

Свойства:

1°. $(\int f(x)dx)' = f(x);$

2°. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

3°. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4°. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, a - \textit{число};$

5°. $\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

6°. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $\mathrm{u} = \varphi(x)$,

то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C,$ при $m \neq 1;$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

6. $\int \ell^x dx = \ell^x + C;$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

10. $\int \sec^2 x dx = tgx + C;$

11. $\int \cos ec^2 x dx = -ctgx + C;$

12. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C;$

13. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|\, f(x)| + C;$

14. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\,\dfrac{x}{a} + C = arctgx + C;$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{2} + C;$

18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\dfrac{x}{2}\right| + C;$

19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

20. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$

21. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a_2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

23. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{2} + C$.

Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$,

2. $\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$,

3. $\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2 dx - 4\int xdx + 12\int dx = 4\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 12x + C =$
$= \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + 12x + C.$

4. $\int 2(3x-1)^2 dx = 2\int (9x^2 - 6x + 1)dx = 2(\frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x) + C =$
$2(3x^3 - 3x + x) + C = 6x^3 - 6x^2 + 2x + C.$

5. $\int \frac{dx}{3^x} = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + C = -\frac{1}{3^x \ln 3} + C$,

6. $\int 2^{3x-1} dx = \int (2^{3x} \div 2)dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2}\frac{8^x}{\ln 8} + C$,

7. $\int \frac{dx}{9x^2 - 1} = \int \frac{1}{9}\frac{dx}{x^2 - (1/3)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2 - \left(1/3\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x - 1/3}{x + 1/3}\right| + C =$
$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x - 1/3}{x + 1/3}\right|,$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2 + 1/4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1/4}} = \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1/4} + C\right|$,

9. $\int \frac{dx}{4x^2 + 25} = \int \frac{dx}{4(x^2 + (25/4))} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + \left(5/2\right)^2} = \frac{1}{10} arctg\,\frac{2x}{5} + C,$

10.

$$\int \frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{\sqrt{x}+2}dx = \int (x^{3/2}+4x^{1/2}-2x-8)dx =$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{8}{3}x^{3/2}-x^2-8x+C.$$

Вычислите интегралы:

1. $\int (2-3e^x+x)dx$;
2. $\int (3x^5-\cos x-1)dx$;
3. $\int (7x^6-\sin x+3)dx$;
4. $\int \left(7-\frac{1}{2\cos^2 x}-x^2\right)dx$;
5. $\int \left(x^4-\frac{1}{2x}-4\right)dx$;
6. $\int \left(3-\frac{1}{3\sin^2 x}-5\right)dx$;
7. $\int \left(3x^2-\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}+2\right)dx$;
8. $\int \left(x-\frac{2}{1+x^2}-5\right)dx$;
9. $\int (2\cos x-5x^4+3)dx$;
10. $\int (5e^x-x^3-4)dx$.

Замена переменной в неопределённом интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt;$$

2) $u=\varphi(x)$, где u - новая переменная

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du.$$

Найти интегралы методом замены переменной:

1.

$$\int (1+x^2)^{1/2}xdx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}+C = \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{3}+C,$$

2.

$$\int\left(x^2-3x+1\right)^{10}(2x-3)dx=\int(x^2-3x+1)d(x^2-3x+1)=\frac{(x^2-3x+1)^{11}}{11}+C\ ,$$

3. $\int(\ln t)^4\frac{dt}{t}=\int(\ln t)^4 d(\ln t)=\frac{(\ln t)^5}{5}+C,$

4. $\int\ell^{3\cos x}\sin xdx=\frac{1}{3}\int\ell^{3\cos x}\cdot 3\sin xdx=-\frac{1}{3}\int\ell^{3\cos x}d(3\cos x)=-\frac{1}{3}\ell^{3\cos x}+C\ ,$

5. $\int\cos(5x-3)dx=\frac{1}{5}\int\cos(5x-3)d(5x-3)=\frac{1}{5}\sin(5x-3)+C\ ,$

6. $\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C,$

7. $\int\frac{5dy}{\cos^2 y}=5\int\frac{dy}{\cos^2 y}=5tgy+C,$

8. $\int\frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{\cos^2 x^3}=\frac{1}{3}tgx^3+C,$

9. $\int\frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}=-\frac{1}{2}ctg(x^2+1)+C,$

10. $$\int\sin 2x\cos 2x\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int\sin 4x\cos 4xdx=\frac{1}{4}\int\sin 8xdx=$$
$$=\frac{1}{32}\int\sin 8xd(8x)=-\frac{1}{32}\cos 8x+C,$$

11. $\int(2x+1)^{20}dx;$

Введём подстановку $2x+1=t$, тогда $x=\frac{t-1}{2}=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$.

Дифференцируя, имеем $dx=\frac{1}{2}dt$. Подставив в данный интеграл вместо $2x+1$ и dx их выражения, получим

$$\int(2x+1)^{20}dx=\int t^{20}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{21}}{21}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+1)^{21}}{42}+C.$$

12. $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^3};$

Полагая $x^2+1=t$, имеем $2xdx=dt$, $xdx=(1/2)dt$. Значит,

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2}\int t^{-3}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{4(x^2+1)^4}+C.$$

13. $\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx$;

Полагая $2x^3+1=t$, имеем $6x^2dx=dt$, $x^2dx=(1/6)dt$. Значит,

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int t^4dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{t^5}{30}+C=\frac{\left(2x^3+1\right)^5}{30}+C.$$

13. $\int 3^{5x^2}xdx$;

Полагая $5x^2=t$, имеем $10xdx=dt$, $xdx=\left(1/10\right)dt$. Значит,

$$\int 3^{5x^2}xdx=\frac{1}{10}\int 3^t dt=\frac{1}{10}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{5x^2}}{10\ln 3}+C.$$

14. $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}dx$;

Полагая $x^3+5=t^2$, имеем $3x^2dx=2tdt$, $x^2dx=\frac{2}{3}tdt$. Значит,

$$\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}dx=\frac{2}{3}\int t\cdot tdt=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2t^3}{9}+C=\frac{2\sqrt{\left(x^3+5\right)^3}}{9}+C.$$

Найдите следующие интегралы:

1. $\int\left(7-2x\right)^3dx$;
2. $\int\left(5t-1\right)^4dt$;
3. $\int\frac{dx}{\left(4-3x\right)^2}$;
4. $\int\frac{dz}{\left(5z+1\right)^3}$;
5. $\int\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}dx$;
6. $\int\sqrt{2x+1}dx$;
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(3x-1\right)^3}}$;
8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(3x-5\right)^2}}$;
9. $\int\left(x^2+3\right)^5xdx$;
10. $\int 4\left(x^4-1\right)^2x^3dx$;
11. $\int\frac{6x^2dx}{\left(1-2x^3\right)^4}$;
12. $\int\frac{x^3dx}{\left(5x^4+3\right)^5}$;

13. $\sqrt{4x^3+1}x^2dx$;

14. $\int\sqrt{\left(x^4-1\right)^3}x^3dx$;

15. $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos xdx$;

16. $\int\sqrt{e^x+1}e^xdx$.

Интегрирование по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

u - та функция которая при дифференцировании упрощается;

dv - та часть, интеграл которой известен или может быть найден.

Например: для $\int P(x)\cdot e^{ax}dx,\ \int P(x)\cdot\sin axdx,\ \int P(x)\cdot\cos axdx,$ где $P(x)$ многочлен и за u следует брать $P(x)$;

для $\int P(x)\ln dx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx$

за dv следует брать $P(x)dx$.

Вычислить интегралы:

1. $\int x\cos 2xdx;$

Положим $u=x$, $d\upsilon=\cos 2xdx$; тогда $du=dx$, $\upsilon=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Имеем $\int x\cos 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

2. $\int\ln xdx$;

Положим $u=\ln x$, $d\upsilon=dx$; тогда $du=\frac{dx}{x}$, $\upsilon=x$.

Имеем $\int\ln xdx=\ln x\cdot x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$

3. $\int arctgxdx$;

Положим $u=arctgx$, $d\upsilon=dx$; тогда $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $\upsilon=x$.

Имеем

$$\int arctgxdx = arctgx\cdot x - \int\frac{xdx}{1+x^2} = arctgx\cdot x - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

4. $\int x^2e^xdx$;

Положим $u=x^2$, $d\upsilon = e^xdx$; тогда $du=2xdx$, $\upsilon = e^x$.

Имеем $\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int e^xxdx =$

Ещё раз: $u=x$, $d\upsilon = e^xdx$; тогда $du=dx$, $\upsilon = e^x$.

Продолжим: $= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

Найдите следующие интегралы:

1. $\int x\cos xdx$;
2. $\int(1-x)\sin xdx$;
3. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$;
4. $\int \ln^2 xdx$;
5. $\int xe^xdx$;
6. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$;
7. $\int \arcsin xdx$;
8. $\int e^x\cos xdx$;
9. $\int e^x\sin xdx$;
10. $\int(x^3+1)\ln xdx$.

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Основная формула: $\int\frac{xdx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+c\right| + C_1$ **, где** $a\neq 0$**.**

Найти интегралы:

1. $\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$;

Поскольку $x^2+2x+1=(x+1)^2$, то введём переменную $t=x+1$. Тогда $dt=dx$, $x=t-1$ и

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2t-1}{t^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - \int t^{-2}dt = 2\ln|t| + \frac{1}{t} + C = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

2. $\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx$;

Поскольку $4x^2+4x-3=(2x+1)^2-4$, то положим $t=2x+1$.

Тогда $x=\frac{1}{2}(t-1)$, $dx=\frac{1}{2}dt$ и

$$\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(1/2)(t-1)+1}{t^2-1}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{t+1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{tdt}{t^2-4} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

Для нахождения первого интеграла воспользуемся основной формулой при $a=1,\ \ c=-4$. Второй интеграл табличный.

Продолжим:

$$= \frac{1}{8}\ln|t^2-4| + \frac{1}{16}\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C.$$

Найдите интегралы рациональных функций:

1. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$;
2. $\int \frac{dx}{5x^2-x}$;
3. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx$;
4. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

Определённый интеграл.

Для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$, в том случае, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл $F(x)$, служит ***формула Ньютона – Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

т.е. определённый интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Свойства определённого интеграла.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла,* т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

2. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т.е.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всём отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей,* т.е. для любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Вычислить:

1. $\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$

2. $\int_1^2 2^{3x-4} dx = \left. \left(\frac{1}{3\ln x} 2^{3x-4} \right) \right|_1^2 = \frac{1}{3\ln x} \left. \left(2^{3x-4} \right) \right|_1^2 = \frac{1}{3\ln x} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6\ln 2}.$

Вычислите определённые интегралы:

1. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} \right) dx$;

2. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$;

3. $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$;

4. $\int_{-1}^1 e^x dx$;

5. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx$;

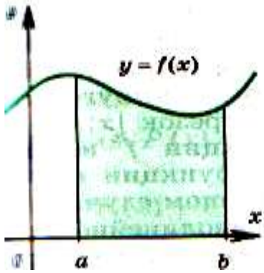
6. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Приложения определённого интеграла.

Геометрические:

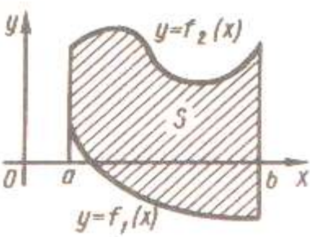
1. Если $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S$$, где S - площадь криволинейной трапеции.



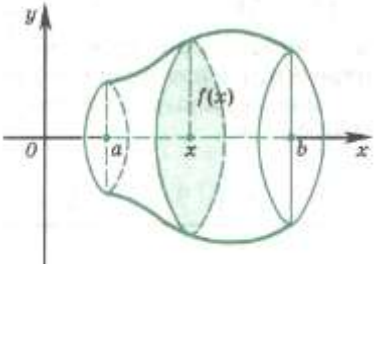
2. Площадь фигуры , ограниченная кривыми $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

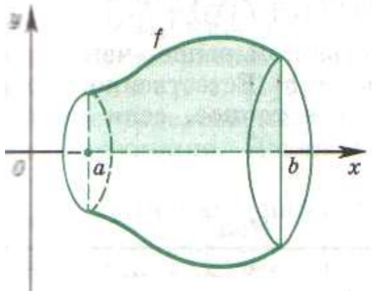


3. Если $S(x)$ площадь поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ох, то объём тела, заключённого между плоскостями $x = a$ и $x = b$, равен

$$V = \int_a^b S(x)dx, \ (a \le b).$$



4. Объём тела вращения



$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

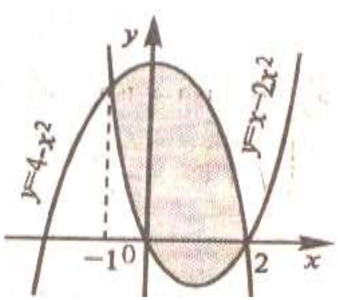
Механические:

5. Если $V(t)$ - скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, то путь S , пройденный точкой за промежуток времени $[T_1;T_2]$, равен $S = \int_{T_1}^{T_2} V(t)dt$.

6. Если $f(x)$ - проекция силы $\vec{P}$ на ось Ox, то работа A силы $\vec{P}$ на отрезке пути $[a;b]$ равна $A = \int_a^b f(x)dx$.

Примеры решений.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$



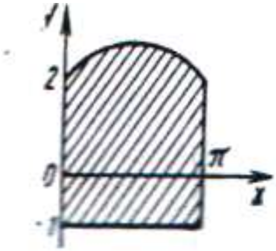
Решив систему уравнений $\begin{cases} y = 4 - x^2; \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$, получаем координаты точек пересечения данных кривых: $(-1;3)$ и $(2;0)$.
Искомая площадь – это площадь фигуры, заключённой между кривыми; при этом на отрезке $[-1;2]$
$f_2(x) = 4 - x^2 \geq f_1(x) = x^2 - 2x$.

Тогда имеем

$$S=\int_{-1}^{2}(4-x^2-(x^2-2x))dx=\int_{-1}^{2}(4-2x^2+2x)dx=$$

$$=\left(4x-\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-4}^{2}=8-\frac{16}{3}+4-\left(-16+\frac{64}{3}+16\right)=9(ед.^2).$$

2. Вычислить плоской фигуры, ограниченной кривыми $y_1=\sin x+2$; $y_2=-1$; $x=0$; $x=\pi$.



Решение:

$$S=\int_{0}^{\pi}(y_1-y_2)dx=\int_{0}^{\pi}(\sin x+2+1)dx=$$

$$=(-\cos x+3x)\Big|_{0}^{\pi}=-\cos\pi+3\pi-(-\cos 0+3\cdot 0)=$$

$$=1+3\pi+1=3\pi+2(ед^2).$$

Вычислите площади фигур ограниченных линиями:

1) $y=x^3$; $x=0$; $y=1$.

2) $y=x^2$; $y=4x-x^2$.

3) $y=x-5-3x^2$; $y=7x-5$;

4) $y=\dfrac{5}{x}$; $y=6-x$;

5) $y=\sin x$; $y=\cos x$; $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

6) $y=e^x$; $y=0$; $x=0$; $x=-1$.

3. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох кривой $y=\sqrt{4x-x^2}$, $y=0$, $x=2$ $\left(0\le x\le 2\right)$.

Решение: $V=\pi\int_{0}^{2}(4x-x^2)dx=\dfrac{16\pi}{3}(ед^2)$.

Найдите объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 0$.

2) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

3) $y = 1 - x^2$; $y = 0$.

4. Скорость движения тела изменяется по закону $V = \left(3t^2 + 2t + 1\right)$м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение: $S = \int\limits_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = \left(t^3 + t^2 + t\right)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 + 10 = 1110(ед^2)$.

5. Скорость движения точки $V = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ую секунду.

Решение: $S = \int\limits_3^4 (9t^2 - 8t)dt = \left(3t^3 4t^2\right)\Big|_3^4 = 83(м)$.

Решите задачи:

1) Скорость движения точки $V = (6t^2 + 4)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2) Скорость движения точки $V = (t - 8t^{-2})$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 2-ую секунду.

3) Скорость движения точки $V = (-3t^2 + 18t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

6. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение:

по закону Гука $F = kx$, где F - сила, Н; x – абсолютное удлинение пружины, м; k - коэффициент пропорциональности, Н/м, имеем $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000 Н / м$. Подставив в это же равенство значение k, находим $F = 1000x$, т.е. $f(x) = 1000x$. Искомую работу найдём при $a = 0$, $b = 0{,}04$:

$$A = \int_{0}^{0,04} 1000x\,dx = 500x^2 \Big|_{0}^{0,04} = 0,8 \text{ (Дж).}$$

Решите задачи:

1) Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу нужно совершить, чтобы её от 0,22 до 0,32 м?

2) При сжатии пружины на 0.05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу нужно совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?

Примерная контрольная работа.

Вариант 1.	Вариант 2.
1.Найдите интегралы: а) $\int \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{1}{e^x} \right) dx.$	1.Найдите интегралы: а) $\int \frac{-x^{-1/2} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{1}{e^x} \right) dx.$
2. Скорость прямолинейного движения $V = 3t^2 + 6t - 4$. Найдите закон движения если за время t = 2 с она прошла путь 8 м.	2. Скорость прямолинейного движения $V = 3t^2 - 2t - 3$. Найдите путь, пройденный точкой за вторую секунду.
3.Вычислите интегралы: а) $\int_0^2 \frac{4xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{3dx}{2\cos^2(x/2)}$.	3.Вычислите интегралы: а) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{2 + \sin x}$.
4. Найдите площади фигур ограниченных линиями: а) $y = -x^2 + x + 6$ и $y = 0$; б) $y = x^2 - 8x + 18$, $y = -2x + 18$.	4. Найдите площади фигур ограниченных линиями: а) $y = -x^2 + 2x + 3$ и $y = 0$; б) $y = -x^2 + 10x - 16$, $y = x + 2$.
5. Вычислите работу, произведённую при сжатии пружины на 0,04 м., если для сжатия её на 0,02 м была затрачена работа 40 Дж.	5. Вычислите работу, произведённую при растяжении пружины на 0,05 м., если для растяжения её на 0,02 м нужна сила 40 Н.

Используемая литература.

1. Н.В. Богомолов «Практические занятия по математике»
Москва «Высшая школа» 2000 г.
2. Э.Н. Балаян « Репетитор по математике для поступающих в вузы».
Ростов-на-Дону «Феникс» 2003г.
3. А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11 класс »
Москва 2003 г.
4. В.А.Подольский, А.М. Суходский «Сборник задач по математике» Москва «Высшая школа» 1999г.