ФГОУ СПО ЛТК

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО МАТЕМАТИКЕ

Дифференциальное исчисление

Ст. Ленинградская
2010г.

Предисловие.

Настоящее пособие написано в соответствии с программой по математике для студентов средних профессиональных учебных заведений. Оно содержит достаточное количество примеров и задач, охватывающих один раздел программы - «Дифференциальное исчисление».

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту восстановить знания, полученные в школе по данной теме, и преодолеть трудности при изучении нового материала.

Это пособие поможет студенту овладеть материалом самостоятельно, так как в каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения и приёмы решения типовых задач, а так же дополнительные задания для закрепления. В конце пособия приведены примерные варианты контрольной работы.

Желаю успеха в усвоении данного раздела!

Пособие составлено преподавателем математики Ульяновой Т.В.

Производная.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в этой точке к приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке.

Дифференциал функции равен произведению её производной на дифференциал аргумента: $dy = f'(x)dx$

§1. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования.

Таблица производных основных элементарных функций.

$(C)' = 0 \quad (C - const);$ $\qquad (x)' = 1;$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1};$ $\qquad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2};$ $\qquad (\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$ $\qquad (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a;$

$(e^x)' = e^x;$ $\qquad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a};$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$ $\qquad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $\qquad (arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования.

$\left(c\cdot u\right)' = c\cdot u' \ ,c - const;$ $\qquad$ $\left(u\pm v\right)' = u' \pm v';$

$\left(u\cdot v\right)' = u'v + v'u;$ $\qquad$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$

Пример 1. Найти производные функции $y'(x)$, если:

1) $y = 4x^3 - x^2 + 3x - 12$; $\qquad$ 2) $y = 2\sqrt{x} - 4x^{-3} + x$;

3) $y = \frac{3}{x} - 2\ell^x + 3$; $\qquad$ 4) $y = 3a^x - 2\log_a x + 4$;

5) $y = 4\ln x + 2\cos x - 6$; $\qquad$ 6) $y = 2\arcsin x + 2ctgx - 5x$;

7) $y = 3\sin x - 4\arccos x - 4x$; $\qquad$ 8) $y = (3x-1)(2x^2 - 4x)$;

9) $f(x) = \frac{1-2x}{1+2x^2}$; $\qquad$ 10) $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Решение:

1) $y' = (4x^3 - x^2 + 3x - 12)' = 12x^2 - 2x + 3;$

2) $y' = (2\sqrt{x} - 4x^{-3} + x)' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 12x^{-4} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{12}{x^4} + 1;$

3) $y' = \left(\ \frac{3}{x} - 2\ell^x + 3\ \right)' = -\frac{3}{x^2} - 2\ell^x;$

4) $y' = (3a^x - 2\log_a x + 4)' = 3a^x \ln a - \frac{2}{x\cdot \ln a};$

5) $y' = (4\ln x + 2\cos x - 6)' = \frac{4}{\ln x} - 2\sin x;$

6) $y' = (2\arcsin x + 2ctgx - 5x)' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sin^2 x} - 5;$

7) $y' = (3\sin x - 4\arccos x - 4x)' = 3\cos x + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - 4;$

8)

$$y' = ((3x-1)(2x^2-4x))' = (3x-1)'(2x^2-4x) + (2x^2-4x)'(3x-1) = 3(2x^2-4x) +$$
$$+(4x-4)(3x-1) = 6x^2 - 12x + 12x^2 - 4x - 12x + 4 = 18x^2 - 28x + 4;$$

9)

$$y' = \left(\frac{1-2x}{1+2x^2}\right)' = \frac{(1-2x)'(1+2x^2) - (1+2x^2)'(1-2x)}{(1+2x^2)^2} = \frac{-2(1+2x^2) - 4x(1-2x)}{(1+2x^2)^2} =$$
$$= \frac{-2-4x^2-4x+8x^2}{(1+2x^2)^2} = \frac{4x^2-4x-2}{(1+2x^2)^2};$$

10) $$y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'(x-1)-(x-1)'\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

Найти производные функций:

№1. $y = 2x^3 - 4x^2 + x - 9$;

№2. $y = 2\sqrt{x} - 4\ell^x - 2\cos x$;

№3. $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{2}{x} - 2ctgx$;

№4. $y = 4\sin x - 3\ln x - 2\sin x$;

№5. $y = \sqrt{x}(2x-4)$;

№6. $y = (x^3+1)\sqrt{x}$;

№7. $y = \sqrt{x}\cos x$;

№8. $y = x^4(\cos x - \ell)$;

№9. $y = \dfrac{x^3}{2x+4}$;

№10. $y = \dfrac{x^2}{3-4x}$;

№11. $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2x-9}$;

№12. $y = \dfrac{-2\sqrt{x}}{8-3x}$.

§ 2. Производные сложных функций.

$y = f(g(x)),\quad y' = f'_u(u)\cdot g'_x(x,)\quad$ где $\quad u = g(x)$.

$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$; $\qquad (\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'; \qquad (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \qquad (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u';$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}\cdot u'; \qquad (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \qquad (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u';$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'; \qquad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u}}\cdot u';$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'; \qquad (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u';$$

$$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'.$$

Пример 2. Найдите значение производной функции в точке x_0, если:

1) $f(x) = (2x^2-4)^6 \qquad x_0 = -1$

$$f'(x) = 6(2x^2-4)^5(2x^2-4)' = 6(2x^2-4)^5 4x = 24x(2x^2-4)^5$$

$$f'(-1) = 24(-1)(2(-1)^2-4)^5 = -24\cdot(-32) = 768$$

2) $f(x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = 4\cos x\cdot(\cos x)' = -4\cos x\cdot \sin x$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = -4\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = -4\cdot 0\cdot 1 = 0$$

Пример 3. Найти производную сложной функции.

1) $f(x) = 4\sin^5 x$

$$f'(x) = 20\sin^4 x\cdot(\sin x)' = 20\sin^4\cdot\cos x$$

2) $f(x) = 5tg^4 x$

$$f'(x) = 20tg^3 x\cdot(tgx)' = 20tg^3 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{20tg^3 x}{\cos^2 x}$$

3) $f(x)=4\sqrt{2x^3-1}$

$$f'(x)=\frac{4}{2\sqrt{2x^3-1}}\cdot(2x^3-1)'=\frac{2\cdot 6x^2}{\sqrt{2x^3-1}}=\frac{12x^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$

4) $f(x)=\dfrac{4}{x^3-4x}$

$$f'(x)=-\frac{4}{(x^3-4x)^2}\cdot(x^3-4x)'=-\frac{4(3x^2-4)}{(x^3-4x)^2}$$

5) $f(x)=4^{3x-2}$

$$f'(x)=4^{3x-2}\cdot\ln 4\cdot(3x-2)'=3\cdot 4^{3x-2}\cdot\ln 4$$

6) $f(x)=4\ell^{x^2-6x}$

$$f'(x)=4\ell^{x^2-6x}\cdot(x^2-6x)'=4(2x-6)\cdot\ell^{x^2-6x}=(8x-24)\cdot\ell^{x^2-6x}$$

7) $f(x)=\log_4(x^2-x)$

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2-x)\cdot\ln 4}\cdot(x^2-x)'=\frac{2x-1}{(x^2-x)\ln 4}$$

8) $f(x)=2\sin(x^2-4)$

$$f'(x)=2\cos(x^2-4)\cdot(x^2-4)'=2\cos(x^2-4)2x=4x\cos(x^2-4)$$

9) $f(x)=4\cos(x^3-x)$

$$f'(x)=-4\sin(x^3-x)\cdot(x^3-x)'=-4\sin(x^3-x)(3x^2-1)$$

10) $f(x)=2tgx^2$

$$f'(x)=\frac{2}{\cos^2 x^2}\cdot(x^2)'=\frac{4x}{\cos^2 x^2}$$

11) $f(x)=3ctg(4x^2-2x)$

$$f'(x)=\frac{-3}{\sin^2(4x^2-2x)}\cdot(4x^2-2x)'=\frac{-3(8x-2)}{\sin^2(4x^2-2x)}=\frac{6-24x}{\sin^2(4x^2-2x)}$$

*12) $f(x)=2\cos^4(x^2-4)$

$$f'(x)=-8\cos^3(x^2-4)\cdot(\cos(x^2-4))'=-8\cos^3(x^2-4)\cdot(-\sin(x^2-4)\cdot(x^2-4)')$$
$$=8\cos^3(x^2-4)\cdot\sin(x^2-4)\cdot 2x=16x\cdot\cos^3(x^2-4)\cdot\sin(x^2-4)$$

*13) $f(x) = 2\ell^{\sqrt{x^2-4}}$

$$f'(x) = 2\ell^{\sqrt{x^2-4}} \cdot (\sqrt{x^2-4})' = 2\ell^{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}} \cdot (x^2-4)' = \frac{2x \cdot \ell^{\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}}$$

Найти производные сложных функций:

№1. $y = (4x-9)^7$;

№2. $y = (5x+1)^9$;

№3. $y = \left(\frac{x}{3}+2\right)^{12}$;

№4. $y = \left(\frac{x}{4}-3\right)^{14}$;

№5. $y = 2cos^4 x - 4x^2$;

№6. $y = 2\sin^5 x + \ell$;

№7. $y = \ell^{4x-2}$;

№8. $y = 3\ell^{x^2-4x}$;

№9. $y = \frac{2}{x^2-4}$;

№10. $y = \frac{5}{2-4x} + 2\cos^2 x$;

№11. $y = \sin(3x-9)$;

№12. $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)$;

№13. $y = \cos(5x+9)$;

№14. $y = 4\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$;

№15. $y = tg\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$;

№16. $y = 2ctg\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)$;

№17. $y = \sqrt{15-7x}$;

№18. $y = 4\sqrt{4+0,5x}$;

№19. $y = 2\ln(x^2-4x)$;

№20. $y = 4\ln(4-4x^2)$.

№21. $y = 2\cos^4(2x-4) + \ell^{2x}$;

№22. $y = 2\ell^{\sqrt{2x}}$.

§ 3. Производные высших порядков.

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её первой производной:

$$y'' = \left(f(x)\right)'.$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её второй производной:

$$y''' = \left(f''(x)\right)'.$$

Производная n-ого порядка (n-я производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её $(n-1)$ производной:

$$y^n = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Пример 4. Найти третью производную от функции $y = x\ln 2x$ в точке x = 2.

Решение:

$$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$$

$$y'' = (y')' = (\ln 2x + 1)' = (\ln 2 + \ln x + 1)' = \frac{1}{x};$$

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}.$$

При x = 2 имеем $y'''(2) = -\frac{1}{4}$.

Найти производные второго порядка от указанных функций:

№1. $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$;

№2. $y = (2x+5)^3$;

№3 $y = \frac{1}{x-1}$;

№4. $y = \cos^2 x$;

№5. $y = \ell^{-x^2}$;

№6. $y = 5^{\sqrt{x}}$;

№7. $y = arctg 3x$;

№8. $y = x\sin 2x$;

№9. $y = \ln tgx$;

№10. $y = \ell^x \cos x$.

№11. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

№12. Показать, что функция $y = x^2 \ln x$ удовлетворяет уравнению $xy'' - y' = 2x$.

№13. Показать, что функция $y = \ell^x \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + 5y = 0$.

№14. Дана функция $f(x) = x\ell^x$. Найти $f'''(-3)$, $f'''(0)$, $f'''(-1)$.

№15. Дана функция $f(x)=\cos^2 2x$. Найти $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f'''\left(-\frac{\pi}{24}\right)$, $f'''\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

§ 4. Геометрический смысл производной.

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0. Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ох.

$f'(x)=k=tg\alpha$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящая через точку касания, называется *нормалью графика данной функции.*

Уравнение нормали: $y=f(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

Пример 5. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $f(x)=x^2-3x$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение:

1)Уравнение касательной имеет вид: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

2) Найдем значение функции в точке $x_0=1$: $f(x_0)=f(1)=1^2-3\cdot1=-2$

3) Найдём производную функции: $f'(x)=2x-3$

4) Найдём значение производной функции в точке $x_0=1$:

$f'(x_0)=f'(1)=2\cdot1-3=-1$

5) Уравнение касательной примет вид: $y=-2-1(x-1)$; $y=-x-1$

6) Уравнение нормали: $y=-2+1(x-1)$; $y=x-3$

Ответ: $y=-x-1$(касательная); $y=x-3$ (нормаль).

Пример 6. Составить уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x) = -x^2 - 4$ параллельно прямой $y = -2x + 6$.

Решение:

Так как касательная параллельна прямой $y = -2x + 6$, то её угловой коэффициент $\kappa = -2$. С другой стороны, $\kappa = f'(x)$. Абсциссу точки x_0 находим из условия $f'(x_0) = -2$. Так как $f'(x) = (-x^2 + 4)' = -2x$, то $-2x_0 = -2$, откуда $x_0 = 1$.

Составим уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $x_0 = 1$, $y_0 = -1 + 4 = 3$, тогда у – 3 = - 2 (х – 1), откуда у = - 2 х + 5.

Ответ: у = - 2х + 5.

Пример 7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 7$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение:

Т.к. $k = f'(x_0)$ то:

1) $f'(x) = x^2 - 2$;

2) $f'(3) = 9 - 2 = 7$;

3) $k = 7$.

Ответ: $k = 7$.

$$f'(x) = k = tg\alpha; \qquad \alpha = arctgk$$

Решите задачи:

№1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 7$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Ответ: $k = 7$.

№2. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Ответ: к = 8.

№3. Найти угол между касательной к графику функции $f(x) = -2\sin x + 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, и положительным направлением оси абсцисс.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4}$

№4. Найти угол между касательной к графику функции $f(x) = 3\cos x + 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$, и положительным направлением оси абсцисс.

Ответ: $\alpha = 0$

Составить уравнения касательной и нормали к графику кривой $y = f(x)$ ***в точке, абсцисса которой равна*** x_0.

а) $y = 2x^3 - 3x + 5$, $x_0 = -1$,

б) $y = \sqrt{4 - 2x^2},$ $x_0 = 1$.

§ 5. Механический смысл производной.

Пусть S = S(t) – уравнение зависимости пути от времени при движении какого-то тела.

Тогда $S'(t) = U(t)$ – скорость движения этого тела в момент времени t.

$S''(t) = U'(t) = a(t)$ – ускорение движущегося тела в момент времени t.

Решите задачи:

№1. При движении тела по прямой расстояние S(t) в метрах от начальной точки М изменяется по закону $S(t) = t^3 - t^2 - t + 5$ (t - время в секундах). Определить скорость и ускорение через 4с. после начала движения.

Ответ: $U(4) = 39м | с$, $a(4) = 22м/с^2$.

№2. При движении тела по прямой расстояние S(t) в метрах от начальной точки М изменяется по закону $S(t) = 2t^4 - t^3 + 1$ (t- время в секундах). Определить скорость и ускорение через 2с. после начала движения.

Ответ: $U(2) = 52м | с$, $a(2) = 84м/с^2$.

№3. Тело движется по закону $S(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + 6$ (t - время в секундах).

Через сколько секунд мгновенное ускорение будет равно 11м/с^2.

Ответ: t = 2,5 с.

№4. Скорость движения тела изменяется по формуле: $U(t)=2t^2-t+2$, через сколько секунд мгновенное ускорение будет рано 7 м/с^2.
Ответ: t = 2 с.

№5. Тело движется по закону $S(t)=t^3+2t+1$(t - время в часах).
Через сколько часов мгновенная скорость будет равна 50 км/ч.
Ответ: t = 4 ч.

№6. Скорость движения тела изменяется по формуле: $U(t)=6t^2-12t+12$,
(t - время в секундах). Найти скорость тела в момент, когда его ускорение будет равно нулю.
Ответ: U(1) = 6 м/с.

№7. Два тела совершают прямолинейное движение
$S_1(t)=3t^2-2t+10$;
$S_2(t)=t^2+5t+1$. Через сколько секунд скорость движения 1-го тела будет в 2 раза больше скорости движения второго тела.
Ответ: 6 с.

Применения производной.

Если $f'(x)>0$ на промежутке, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке.
Если $f'(x)<0$ на промежутке, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.
Если $f'(x)=0$ на промежутке, то $f(x)$=C (константа) на этом промежутке.
Критические точки функции находят из условия $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует на области определения функции.
Если в точке x_0 производная меняет знак, то x_0 - точка экстремума.
При изменении знака производной с «+» на «-» x_0- точка максимума, а с «-» на «+» x_0 – точка минимума.
Если $f(x)$ дифференцируема на промежутке, то $f(x)$ непрерывна на этом промежутке.

§ 6. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума функции.

Пример 8. Доказать, что функция $y = 2x^5 + 4x^3 - 1$ возрастает на всей числовой прямой.

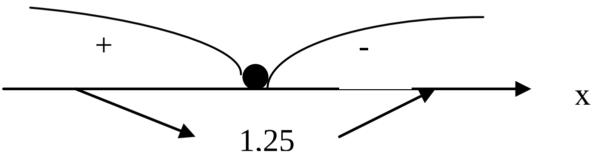
Решение:

Найдём производную функции $y' = 10x^4 + 12x^2$. Заметим, что $10x^4 + 12x^2 \geq 0$ при всех $x \in R$, а это и означает, что функция возрастает на всей числовой прямой. Точек экстремума нет.

Пример 9. Найти промежутки монотонности функции $y = 2x^2 - 5x + 3$

1) $y' = 4x - 5$

2) $y' = 0$; $4x - 5 = 0$, x = 1,25



Ответ: Функция убывает при $x \in (-\infty; 1{,}25]$, и возрастает при $x \in [1{,}25; +\infty)$.

x = 1,25 – точка минимума.

Пример 10. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = -\dfrac{3}{x}$

Решение:

1) D(f)=R|0

2) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$

3) $f'(x) < 0$ при любых x $\neq$ 0.

Ответ: Функция убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

№1. $y = x^2 - 6x + 5$;

№2. $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2$;

№3. $y=x^4-4x+3$;

№4. $y=\frac{1}{3x-2}$;

№5. $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$.

§ 7. Алгоритм нахождения экстремумов функций с помощью первой производной.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки в которых $f'(x)=0$ или не существует (терпит разрыв).
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции f(x). При этом критическая точка x_0 есть точка минимума если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)$< 0, от промежутка, в котором $f'(x)$> 0, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделённых критической точкой знак не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 11. *Исследовать на экстремум функцию:* $y=2x^3-9x^2+12x-8$

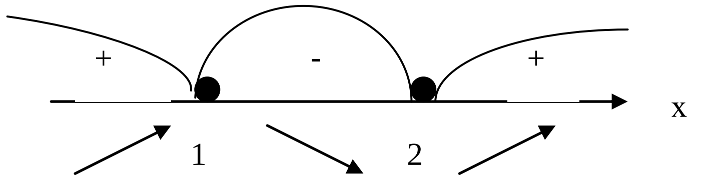
Решение:

1) $y'=6x^2-18x+12$

2) $y'=0;\ \ 6x^2-18x+12=0\,/:6$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_1=2\ ,\ \ x_2=1.$$



Так как производная $y'(x)$ при переходе через стационарную точку меняет знак с плюса на минус, то x = 1 – точка максимума функции. y(1) = - 3 – значение функции в точке максимума. x = 2 – точка минимума. y(2) = - 4 – значение функции в точке минимума.

Ответ: x = 1 – точка максимума, $y_{\max} = -3$;

x = 2 – точка минимума, $y_{\min} = -4$.

Исследуйте на экстремум следующие функции:

№1. $y = 7 + 12x - x^3$;

№2. $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$;

№3. $y = x^4 - 8x^2$;

№4. $y = 2x + \dfrac{8}{x}$;

№5. $y = \sqrt{2x - 5}$;

№6. $y = (x - 3)^4$;

№7. $y = 2\sin 2x - \sin 4x$;

№8. $y = \cos 2x - x$.

§ 8. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной.

Если y' производная от функции $y = f(x)$, то производная от y' по x (если она существует) называется *второй производной* (или производной второго порядка). Для второй производной употребляются следующие обозначения: y'' или $f''(x)$.

Алгоритм нахождения экстремумов функции $y = f(x)$ с помощью второй производной.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки данной функции, в которых $f'(x) = 0$.
3. Найти вторую производную $f''(x)$.
4. Исследовать знак второй производной в каждой иэ критических точек.

Если при этом вторая производная окажется отрицательной, то функция в такой точке имеет максимум, а если положительной, то – минимум. Если же вторая производная равна нулю, то экстремум функции надо искать с помощью первой производной.

5. Вычислить значение функции в точках экстремума.

Пример 12. Исследовать на экстремум с помощью второй производной:

а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

1. Находим производную: $f'(x) = 2x - 2$.

2. Решая уравнение: $f'(x) = 0$, получим критическую точку x = 1.

3. Найдем теперь вторую производную: $f''(x) = 2$.

4. Так как вторая производная в критической точке положительна, то при x = 1 функция имеет минимум: $f_{\min} = f(1) = -4$.

б) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

1. Находим $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$; $f'(x) = 0$; $3x^2 - 18x + 24 = 0$, откуда $x_1 = 2, x_2 = 4$.

2. Найдём теперь $f''(x) = 6x - 18$.

3. Определим знак второй производной в критических точках. Так как $f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$, то при x = 2 функция имеет максимум; так как $f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$, то при x = 4 функция имеет минимум.

4. Вычислим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\max} = f(2) = 8, \quad f_{\min} = f(4) = 4.$$

Исследуйте на экстремум с помощью второй производной следующие функции:

1) $f(x) = 2x^2 - 3$;

2) $f(x) = x^2 - 2x$;

3) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$;

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$;

6) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - 2$;

7) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$;

4) $f(x)=-x^2+4x$;

8) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

§ 9. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке.

1. *Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;*

2. *Найти значения функции на концах промежутка;*

3. *Сравнить полученные значения; тогда наибольшее и наименьшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции на рассматриваемом промежутке.*

Пример 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2-4x+3$ на $[0;3]$.

1. $f'(x)=2x-4$; 2x – 4 = 0; x = 2 – критическая точка. $f(2)=-1$.
2. Находим значения функции на концах данного отрезка $f(0)=3$, $f(3)=0$.
3. Сравниваем.

Ответ: $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=3$, $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)=-1$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций в заданных промежутках:

1) $f(x)=x^2-6x+13$, $[0;6]$;

2) $f(x)=8-0{,}5x^2$, $[-2;2]$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3$, $[1;3]$;

4) $f(x)=6x^2-x^3$, $[-1;6]$;

5) $f(x)=x^3-3x^2-9x+35$, $[-4;4]$;

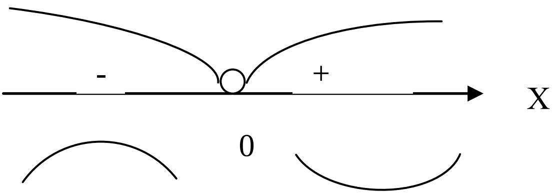
6 $f(x)=-x^3+9x^2-24x+10$, $[0;3]$.

§ 10. Направление выпуклости графика функции $y = f(x)$.

Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз на этом промежутке, если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.

Пример 14. Найти промежутки выпуклости кривой $f(x) = x^3$

1. $f'(x) = 3x^2$,
2. $f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0$ при x = 0
3. С помощью метода интервалов определим знаки второй производной:



Ответ: Кривая выпукла вверх при $x \in (-\infty;0)$, и выпукла вниз при $x \in (0;\infty)$.

Исследуйте на направление выпуклости кривые:

1) $y = 4x^3 - 2$;
2) $y = 3x^3 - 2x + 5$;
3) $y = 4x^2 + 5x$;
4) $y = -2x^2 - 4$;
5) $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 3$;
6) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8$.

§ 11. Точки перегиба.

Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.

Если при переходе через критическую точку x_0, вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Алгоритм нахождения точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

1. *Найти вторую производную $f''(x)$.*

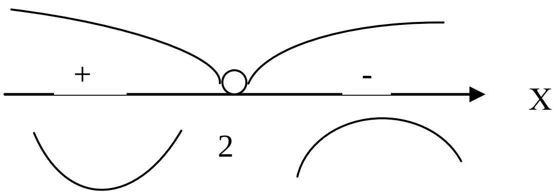
2. *Найти критические точки функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.*

3. *Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения данной функции. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции..*

4. *Вычислить значения функции в точках перегиба.*

Пример 15. Найти точки перегиба кривой $f(x) = 6x^2 - x^3$.

1. $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x$.
2. $f''(x) = 0$, $12 - 6x = 0$, $x = 2$ - критическая точка.
3.



при x = 2 кривая имеет точку перегиба.

4. $f(2) = 6 \cdot 4 - 8 = 16$

Ответ: (2 ; 16) – точка перегиба.

Найти точки перегиба следующих кривых:

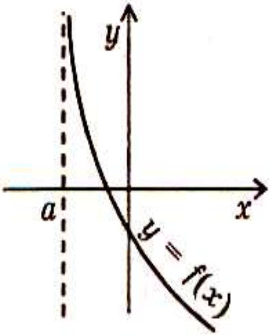
1) $f(x) = x^3 - 2x$; 3) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 10$;

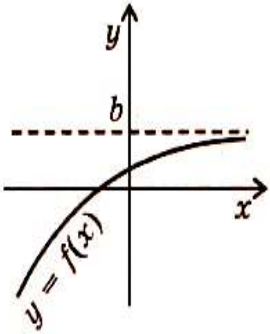
2) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$; 4) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

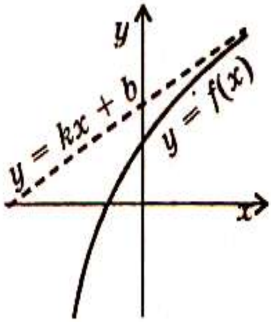
§ 12. Асимптоты.

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

Асимптотой графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.







Вертикальная асимптота $x = a$

Горизонтальная асимптота $y = в$

Наклонная асимптота $y = кx + в$

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой***, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (предел слева) или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (предел справа) равен бесконечности.

Прямая $y = в$ является ***горизонтальной асимптотой,*** если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Прямая $y = кx + в$ является ***наклонной асимптотой,*** если существуют конечные пределы

$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim (f(x) - kx)$$

либо при $x \to \infty$, либо при $x \to -\infty$.

Пример16. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

Решение: Очевидно график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty\right)$.

Найдём наклонную асимптоту.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^3}{x^2+1} \div x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = 0\,.$$

Таким образом, наклонная асимптота графика функции имеет вид y = x.

§ 13. Применение производной к построению графиков функций.

Алгоритм построения графиков функций:

1. *Найти область определения функции.*
2. *Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной или периодической.*
3. *Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).*
4. *Найти асимптоты графика функции.*
5. *Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.*
6. *Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.*
7. *Построить график функции, используя полученные результаты исследования.*

Пример 17. Построить график функции $y = \dfrac{x^2}{x-3}$

Решение:

1. Найдем область определения функции: $D(y) = \left[\begin{array}{l} -\infty < x < 3, \\ 3 < x < \infty. \end{array}\right.$.

2. Данная функция не является ни чётной, ни нечётной, ни периодической.
3. При x = 0 получим y = 0, т.е. график проходит через начало координат.
4. Так как $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} = \pm\infty$, то прямая x = 3 служит вертикальной асимптотой графика.
Далее находим:

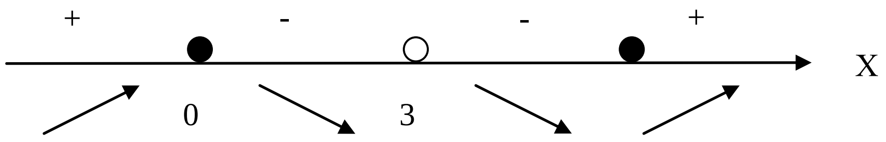
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-3)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-3}-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-3} = 3.$$

Следовательно, прямая $y = x+3$ является наклонной асимптотой графика.

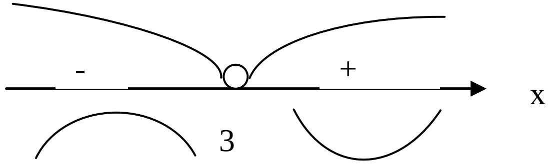
5. Находим $$y' = \frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Производная y' обращается в нуль при x = 0 и x = 6 и терпит разрыв при x = 3.



$y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(6) = 12$.

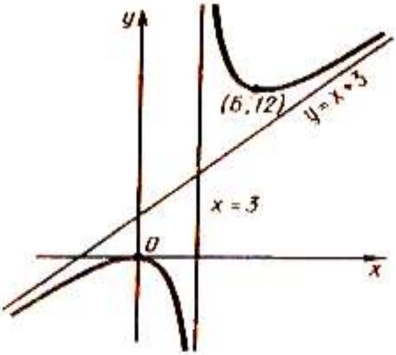
6. Находим $$y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)}.$$



Вторая производная в нуль нигде не обращается и терпит разрыв при $x = 3$.

Точек перегиба нет.

7. На основании полученных данных строим график функции.



Исследуйте следующие функции и постройте их графики.

1) $y = 3x^2 - 4x + 5$;

2) $y = 7 - x - 2x^2$;

3) $y = 3x^2 - x^3$;

4) $y = x^3 + 3x^2$;

2) 5) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

6) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$;

7) $y = 2x^3 + x^2 - x - 1$;

8) $y = x^3 + x^2 - x - 1$

9) $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \dfrac{11}{3}$;

10) $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \dfrac{5}{3}$;

11) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$;

12) $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$;

13) $y = x^5 - 5x$;

14) $y = 5x^3 - 3x^5$;

15) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$;

16) $y = \dfrac{x-3}{x+1}$;

Проверочная работа.

Вариант 1.

1) Найдите промежутки монотонности функции: $y = x^4 - 32x + 40$.
2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции: $y = x^3 - x^2 - 9x$ на отрезке $[-2;2]$.
3) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:
   а) $y = x^3 + 3x^2$;
   б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.
   Дан закон прямолинейного движения точки $S = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3$ (t - в секундах, S – в метрах). Найдите максимальную скорость точки.
4) Найти производные сложных функций:
   а) $y = 4(2x^2 - 4x)^4$;
   б) $y = 2\ell^{4x-2} + \ln(4x-5)$;
   в) $y = 2\cos^5(2x-5)$;
   г) $y = \sqrt{4x^2 - 5x} + \frac{4}{4x+3}$.

Вариант 2.

1) Найдите промежутки монотонности функции: $y = \frac{1}{4}x^4 - x + 1$.
2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции: $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 2$ на отрезке $[-4;4]$.
3) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба кривых:
   а) $y = 2x^3$;
   б) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 4$.
   Дан закон прямолинейного движения точки $S = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 4t - 3$ (t - в секундах, S – в метрах). Найдите максимальную скорость точки.
4) Найти производные сложных функций:
   а) $y = 3(2x^3 - 4x)^3$;
   б) $y = 4\ell^{4x} + 3\ln(2x^3 - 4)$;
   в) $y = 2\sin^4(2x^2 - 7x)$;
   г) $y = \sqrt{x^2 - 5x^3} + \frac{4}{x+1}$.

Оглавление

Используемая литература.

1. Н.В. Богомолов «Практические занятия по математике» Москва «Высшая школа» 2000 г.
2. Э.Н. Балаян « Репетитор по математике для поступающих в вузы». Ростов-на-Дону «Феникс» 2003г.
3. А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11 класс » Москва 2003 г.
4. В.А.Подольский, А.М. Суходский «Сборник задач по математике» Москва «Высшая школа» 1999г.