ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ СПО
«ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Практическое пособие
по изучению раздела

Дифференциальное исчисление

Составила: Миргородская Ирина Николаевна,
преподаватель математики

ст. Ленинградская
2007 г.

Пособие составлено в соответствии с государственными требованиями к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям среднего профессионального образования.

Данное пособие ставит своей целью оказание помощи студентам, обучающимся по специальности 080110 «Экономика и бухгалтерский учет» (по отраслям), в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков в объеме действующей программы.

В данном пособии представлено краткое содержание основного теоретического материала, подробное решение примеров и упражнения для самостоятельной работы. Итоговая контрольная работа позволит закрепить полученные знания по данной теме.

Пособие может быть использовано преподавателями математики при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Содержание

1. Сведения из истории

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций, называется дифференциальным исчислением.

Дифференциальное исчисление создано И.Ньютоном и Г.Лейбницем в конце XVII столетия.

Термин «производная» ввел в 1797 г. Ж.Лагранж, он же ввел современные обозначения y', $f\ '$. Ньютон называл производную функцию *флюксией,* а саму функцию – *флюентой*. Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и ввел обозначение производной $\frac{df}{dx}$, которое встречается в современной литературе. Символ df Лейбниц выбрал для обозначения дифференциала функции f.

В 1629 г. П.Ферма предложил правила нахождения экстремумов многочленов. Слово «экстремум» происходит от латинского extremum (крайний). Maximum переводится как наибольший, а minimum – наименьший.

А.Лопиталь в 1696 г. издал первый печатный курс дифференциального исчисления «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий», способствовавший распространению новых методов.

2. Понятие и определение производной.

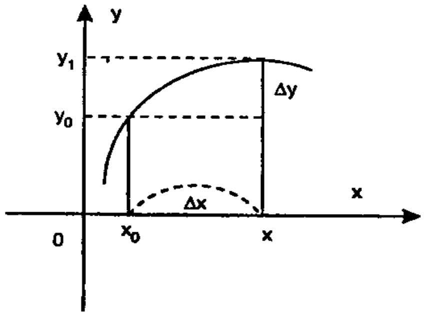
Пусть дана функция $y = f(x)$. Дадим аргументу x_0 произвольное приращение Δx. Тогда данная функция примет новое значение $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$. Разность $y_1 - y_0$ дает нам приращение функции Δy, т.е.

$y_1 - y_0 = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Устремим Δx к нулю. Если при этом отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f\ '(x_0)$.

Определение:

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю.



$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Производная обозначается одним из символов: y_x', y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$.

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Общий метод нахождения производной.

Для того чтобы продифференцировать функцию y от x, надо:

1) вычислить значение функции y, соответствующее данному значению аргумента x;
2) придать данному значению аргумента приращение Δx и вычислить новое значение $y + \Delta y$ функции;
3) вычесть прежнее значение функции из нового и тем самым определить приращение Δy функции;
4) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
5) найти предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$; этот предел и дает искомую производную.

Пример. Найти производную функции $y = 3x^2 + 5$ в любой точке x, найти производные данной функции в точках $x = 2$ и $x = -3$.

Решение.

1) $y = 3x^2 + 5$
2) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5;$
3) $y + \Delta y = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$

$$- \underline{y \quad = 3x^2 \qquad\qquad + 5}$$

$$\Delta y = 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2$$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3 \cdot \Delta x;$

5) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6x + 3 \cdot \Delta x) = 6x.$

Найдем значение производной функции $f(x)$:

при $x = 2$, $f'(2) = 6 \cdot 2 = 12,$

при $x = -3$, $f'(-3) = 6 \cdot (-3) = -18.$

3. Основные правила и формулы дифференциального исчисления.

Обозначения: *C* – постоянная; *x* – аргумент; *u, v, w* – функции от *x*, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

1. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3. $(C \cdot v)' = C \cdot v'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$

Формулы дифференцирования.

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$.
1. C	0
2. x	1
3. x^n	$n \cdot x^{n-1}$
4. $\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
6. a^x	$a^x \cdot \ln a$
7. e^x	e^x
8. $\sin x$	$\cos x$
9. $\cos x$	$-\sin x$

10.	*tg x*	$\frac{1}{\cos^2 x}$
11.	*ctg x*	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
12.	$log_a x$	$\frac{1}{x\ell na}$
13.	*ln x*	$\frac{1}{x}$
14.	*arcsin x*	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.	*arccos x*	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16.	*arctg x*	$\frac{1}{1+x^2}$
17.	*arcctg x*	$-\frac{1}{1+x^2}$

Например.

1. $y = 3^x - 2x^5 + e^2$

$y' = (3^x - 2x^5 + e^2)' = (3^x)' - 2 \cdot (x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4$

2. $y = 2^x \cdot x^3$

$y' = (2^x \cdot x^3)' = (2^x)' \cdot x^3 + 2^x \cdot (x^3)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^3 + 2^x \cdot 3x^2 = 2^x \cdot x^2 (x \cdot \ln 2 + 3)$

3. $y = \frac{x^2}{2-x^2}$

$$y' = \left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (2-x^2) - x^2 \cdot (2-x^2)'}{(2-x^2)^2} = \frac{2x \cdot (2-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(2-x^2)^2} =$$

$$= \frac{4x - 2x^3 + 2x^3}{(2-x^2)^2} = \frac{4x}{(2-x^2)^2}$$

4. $y = 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + 4$

$y' = (3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + 4)' = 3(x^{\frac{1}{3}})' + 2(x^{\frac{1}{2}})' - (x^{-2})' + (4)' =$

$= 3 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - (-2) x^{-2-1} = x^{\frac{-2}{3}} + x^{\frac{-1}{2}} + 2x^{-3}$

5. $y = \dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ - 1 = $x^{2+\frac{2}{3}-1}$ + 2 $x^{-\frac{1}{2}}$ - 1 = $x^{1\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ - 1

y' =($x^{1\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ - 1)' = $\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{-3}{2}}$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Найти производные функций:

1. $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$	2. $y = 0,5t^3 + 0,6t^2 + 0,8t + 11$
3. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$	4. $y = (2x + 1)(x^2 + 3x - 1)$
5. $y = \dfrac{5}{x^3 + 2x}$	6. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$
7. $y = x^{-5} - 4x^{-3} + 2cosx - 3x^{-2}$	8. $y = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} + 1$
9. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3tgx + 2x$	10. $y = -3x^{-5} + 15x^{-4} - 2x^{-3} + x^{-1} + 8$
11. $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 5sinx$	12. $y = x\cdot\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\sqrt{3}\,cosx$
13. $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$	14. $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$
15. $y = \dfrac{x^3\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} + x^2\cdot\sqrt{x^3} - 2\sqrt{7}\,ctgx$	16. $y = \dfrac{\ln x + 4x^2}{e^x}$

4. Производная сложной функции.

Пусть дана сложная функция $y = g(u)$, где $u = f(x)$.

Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, а функция $y = g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u = f(x)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ в данной точке x имеет производную, которая находится по формуле

$$y_x' = g'(u)\cdot f'(x) \quad \text{или} \quad y_x' = y_u'\cdot u_x'.$$

Формулы дифференцирования сложной функции.

	Функция	Производная
1.	u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2.	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
3.	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
4.	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
5.	e^u	$e^u \cdot u'$
6.	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
7.	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
8.	$tg\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9.	$ctg\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10.	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ell na} \cdot u'$
11.	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
12.	$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13.	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14.	$arctg\, u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
15.	$arcctg\, u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$

Например.

1. $y = (1 + x^2)^5$

$y' = ((1 + x^2)^5)' = 5 \cdot (1 + x^2)^4 \cdot (1 + x^2)' = 10\, x \cdot (1 + x^2)^4$

2. $y = \sin^2 x$

$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

3. $y = (\ln x)^2$

$y' = ((\ln x)^2) = 2\ln x \cdot (\ln x)' = \frac{2}{x} \cdot \ln x$

4. $y = x\ e^{x^2}$

$y' = (x\ e^{x^2})' = (x)' \cdot e^{x^2} + x \cdot (e^{x^2})' = e^{x^2} + x\ e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} + x\ e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot (1 + 2x^2)$

5. $y = \arccos\frac{x+2}{3}$

$$y' = \left(\arccos\frac{x+2}{3}\right)' = -\frac{\left(\frac{x+2}{3}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}} = -\frac{1}{3\sqrt{\frac{9-x^2-4x-4}{9}}} = -\frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\ .$$

Задания для самостоятельной работы

Найти производные функций:

1. $y = \sqrt{1+x^3}$	2. $y = \sqrt[5]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$
3. $y = \arcsin(1-x^4)$	4. $y = \frac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x$
5. $y = \frac{5}{tg^3 2x}$	6. $y = arctg\frac{4x}{1+\sqrt{1-x^2}}$
7. $y = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 3$	8. $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{9-4x^2}$
9. $y = arcctg e^{-6x}$	10. $y = \frac{\ell og_3^2 x}{2x^4} + 5\pi^2$
11. $y = \arccos(3x-4x^3)$	12. $y = \sin^3 x \cos 2x$
13. $y = \frac{5x}{(4x^3-2)^6}$	14. $y = 7 \cdot e^{\sin^2 4x}$
15. $y = 6^{tg^5 x} + \frac{7}{9}x^2\sqrt{x}$	16. $y = \sqrt{\sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)}$

5. Вторая производная и производные высших порядков.

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее производной: $y'' = [f'(x)]'$.

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной: $y''' = [f''(x)]'$ и т.д.

Производная n-го порядка (n - ая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее (n – 1)- й производной: $y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Пример. Найти третью производную от функции $y = x \cdot \ln 2x$ в точке x = 2.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим:

$y' = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} = \ln 2x + 1.$

Дифференцируя производную y', найдем:

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, третья производная

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}.$$

При x = 2 имеем $y'''(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Найти производные второго порядка от указанных функций:

а) $y = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 – x$ б) $y = (2x + 5)^3$

c) $y = \ln ctgx$ d) $y = x \cdot \cos 3x$

2. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''(-\frac{\pi}{2}), f''(0)$.

3. Дана функция $f(x) = x \cdot e^x$. Найти $f'''(-3), f'''(2), f'''(0)$.

6. Дифференциал функции. Дифференциал второго порядка.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение её производной на приращение независимой переменной

$dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциал функции можно вычислить по формуле $dy = y'\,dx$, откуда

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Если *u, v, w* – дифференцируемые функции от *x*, а *c* – постоянная, то верны следующие свойства дифференциалов:

$dc = 0, c = const;$

$d(cu) = c\,du, c = const;$

$d(u + c) = du, c = const;$

$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du;$

$d(u - v + w) = du - dv + dw;$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2};$

Пример. Найти дифференциалы функций:

1. $y = \frac{x-1}{x+2}$

$$dy = \frac{(x-1)'(x+2)-(x+2)'(x-1)}{(x+2)^2}\,dx = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}\,dx = \frac{3dx}{(x+2)^2}$$

2. $y = x \cdot (x + 1)$

$dy = (x'(x + 1) + (x + 1)'\,x)\,dx = (x + 1 + x)\,dx = (2x + 1)\,dx$

3. $y = 2^x \cdot \ln x$

$dy = (2^x \cdot \ln x)' \cdot dx = (2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \frac{1}{x})\,dx$

Пусть дана сложная функция $y = f(u(x))$. Тогда *дифференциал сложной функции* $dy = f'(u)\,du$, или $dy = f_u'\,u_x'\,dx$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = cos(1 - x^2)$

$dy = -\sin(1 - x^2)(-2x)\,dx = 2x\sin(1 - x^2)\,dx$

Дифференциал второго порядка (второй дифференциал) – это дифференциал от дифференциала первого порядка.

Пусть дана функция $y = f(x)$, тогда дифференциал второго порядка по определению равен $d^2 y = d(dy)$, следовательно, $d^2 y = y'' \cdot dx^2$.

Например.

Найти дифференциал второго порядка для функции $y = \frac{x}{x+5}$.

$$y' = \frac{x+5-x}{(x+5)^2} = \frac{5}{(x+5)^2}$$

$$y'' = \left(\frac{5}{(x+5)^2}\right)' = \left(5(x+5)^{-2}\right)' = -10(x+5)^{-3}(x+5)' = \frac{-10}{(x+5)^3}$$, таким образом

$d^2 y = -\dfrac{10}{(x+5)^3}\, dx^2$.

Задания для самостоятельной работы

Найти дифференциал второго порядка для функций:

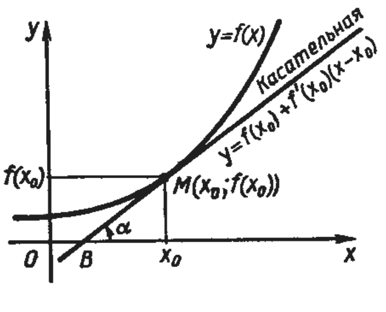
1. $y = \sin x \cdot \ln 3x$
2. $y = \frac{1}{5}x^5 + x^{-4}$
3. $y = 6^x + \frac{5}{2}x^6$
4. $y = \frac{1}{3}\cdot\cos 3x + \frac{1}{2}e^{2x}$

Приложение производной к исследованию функций.

7.Касательная и нормаль к плоской кривой. Скорость и ускорение.

7.1. Касательная и нормаль к плоской кривой.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке. $k = f'(x_0) = tg\alpha$



Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания $M(x_0; f(x_0))$, называется *нормалью* к кривой.

Уравнение нормали записывается в виде $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Например.

1.Составить уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 2x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение:

1) Найдем значение функции в заданной точке $f(x_0) = f(2) = 3$.
2) Найдем производную функции $f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2$.

3) Найдем значение производной функции в заданной точке

$$F'(x_0)= f'(2)= 2\cdot 2 - 2 = 2.$$

4) Подставив найденные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в формулу $y = f(x_0)+ f'(x_0)(x - x_0)$, получим искомое уравнение касательной

$y = 3 + 2(x - 2) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$

$y = 2x - 1$ или $2x - y - 1 = 0$.

2. Написать уравнение нормали к кривой $f(x)= x^3$ в точке $M(2;8)$.

Решение:

1) Имеем абсциссу $x_0 = 2$, а $f(x_0) = 8$.

2) Найдем производную функции $f'(x)= (x^3)'= 3x^2$.

3) Найдем значение производной функции в заданной точке

$f'(x_0)= f'(2)= 3\cdot 2^2 = 12$.

4) Подставив значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в формулу $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$,

получим искомое уравнение нормали

$$y = 8 - \frac{1}{12}(x - 2) \text{ или } x + 12y - 98 = 0.$$

3. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке $C(-2;-8)$.

Решение:

1)Найдем производную функции $y' = (x^3)'= 3x^2$.

2)Найдем производную функции в точке $x = -2$

$$y'(-2) = 3(-2)^2= 12.$$

Итак, угловой коэффициент касательной равен 12.

7.2. Скорость и ускорение.

Механический смысл производной заключается в следующем: *скорость* движения материальной точки в данный момент времени t равна производной пути S по времени t, т.е.

$$V(t) = S'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Ускорение $a(t)$ прямолинейного движения материальной точки в момент времени t равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути S по времени t, т.е.

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Например.

1. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 1 - 2t + t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t = 3$.

Решение:

1) Находим скорость $V(t) = S'(t) = (1 - 2t + t^3)' = -2 + 3t^2$,
2) Скорость в момент времени $t = 3$

$$V(3) = -2 + 3 \cdot 3^2 = 25$$

3) Находим ускорение $a(t) = V'(t) = (-2 + 3t^2)' = 6t$,
4) Ускорение в момент времени $t = 3$, $a(3) = 6 \cdot 3 = 18$.

2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 3t^3 - 12t^2 + 7$ (S - в метрах, t – время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 72 м/с? Через сколько секунд после начала движения ускорение тела будет равно 36 м/с^2?

Решение:

1) Скорость изменяется по закону $V(t) = S'(t) = (3t^3 - 12t^2 + 7)' = 6t^2 - 24t$.
2) Решим уравнение $6t^2 - 24t = 72$; учитывая, что $t > 0$, получим, что $t = 6$ *с.*
3) Ускорение изменяется по закону $a(t) = V'(t) = (6t^2 - 24t)' = 12t - 24$. решим уравнение $12t - 24 = 36$, откуда $t = 5$ *с.*

Задания для самостоятельной работы

1. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ в точке $M(1; 6)$.

2. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - 3$ *при* $x = 0{,}5$.

3. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + 2t^3 - 4$. Найти значения скорости и ускорения в момент времени $t = 4$.

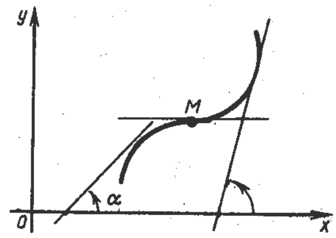
4. Найти момент времени t, в который ускорение точки , движущейся прямолинейно по закону $S(t) = -t^3 + 3t^2 - 8$, равно нулю. Какова при этом скорость точки?

8. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.

8.1. Возрастание и убывание функции.

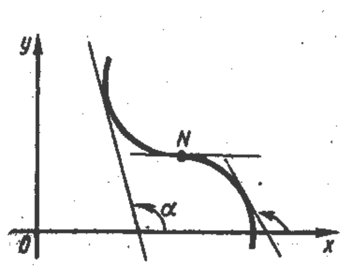
Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы α с положительным направлением оси OX. Касательная может быть параллельной оси OX, значит $f'(x) = tg\alpha \geq 0$.



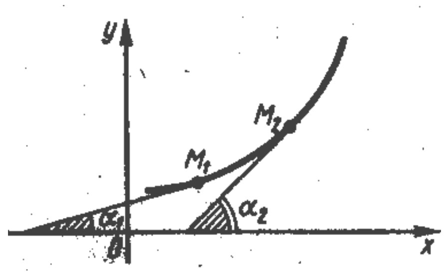
Касательные к графику убывающей функции образуют тупые углы α с положительным направлением оси OX. Касательная может быть параллельной оси OX, значит

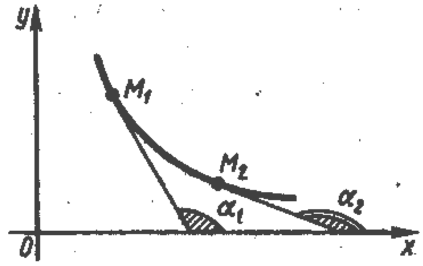
$f'(x) = tg\alpha \leq 0$.



Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).

Если $f'(x)>0$, то $tg\alpha > 0$, т.е. угол α – острый, а это возможно, лишь при возрастании функции.





Если $f'(x)<0$, то $tg\alpha < 0$, т.е. угол α – тупой, а это возможно, лишь при убывании функции.

Возрастание или убывание функции на интервале определяется знаком производной этой функции.

Точки, в которых производная обращается в нуль, называются ***критическими точками*** функции.

Правило нахождения интервалов монотонности функции f(x).

1.Вычислить производную $f'(x)$ данной функции.

2.Найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует. Эти точки называются критическими для функции $f(x)$.

3.Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности.

4.Исследовать знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x)>0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает; если же $f'(x)<0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

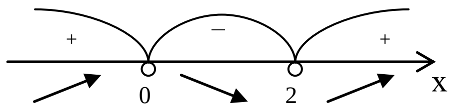
Например. Найти интервалы монотонности функции $f(x)= x^3- 3x^2$.

Решение:

1)Находим $f'(x) = (x^3- 3x^2)'= 3x^2 – 6x$.

2)Находим критические точки: $3x^2 – 6x= 0;\ 3x(x – 2) = 0;\ x = 0,\ x = 2.$

3)Область определения функции$(-\infty;+\infty)$ разбивается на интервалы:



4) Значит функция $f(x)$ возрастает в интервале $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$,

$f(x)$ убывает в интервале $(0; 2)$.

8.2. Экстремум функции.

1. Максимум.

Функция $y = f(x)$ имеет максимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a) > f(x)$.

Признаки максимума:

1. $f'(a) = 0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с " + " на " – " (с возрастания на убывание).

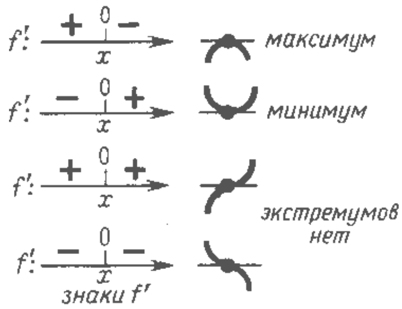
2. Минимум.

Функция $y = f(x)$ имеет минимум при $x = a$, если при всех x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(a) < f(x)$.

Признаки минимума:

1. $f'(a) = 0$;
2. $f'(x)$ при переходе аргумента через $x = a$ меняет знак с " – " на " + " (с убывания на возрастание).

Если при переходе через критическую точку $x = a$ производная не меняет знак, то в этой точке нет экстремума.



Правило нахождения экстремумов.

Пусть дана функция $y = f(x)$.

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти действительные корни уравнения $f'(x) = 0$.
3) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни. Тогда надо расположить их в порядке возрастания на числовой оси, в результате чего ось разобьется на интервалы. С помощью метода интервалов определить знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов.

4) Если при переходе через какой-либо из корней знак производной меняется с " – " на " + ", то данный корень является точкой *min,* если при переходе через какой-либо из корней знак производной меняется с " + " на " – " , то данный корень является точкой *max,* если же при переходе через какой-либо из корней знак производной не меняется, то данный корень не является точкой экстремума.

   Причем, пользуясь методом интервалов, знаки расставляем, справа налево, а смотрим, определяя экстремум слева направо.

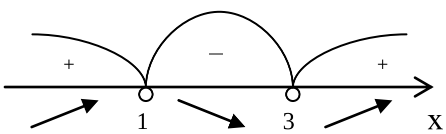
5) Найти значения функции в точках экстремума $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n)$ (*max* и *min*).

Правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной:

1.Находят первую производную $f'(x)$.
2.Находят действительные корни уравнения $f'(x)=0$ (критические точки).
3.Находят вторую производную $f''(x)$.
4.Во вторую производную подставляют поочередно все критические значения; если при этой подстановке вторая производная окажется положительной, то в этой точке функция имеет минимум; если же вторая производная окажется отрицательной, то функция имеет максимум. Если при подстановке получится нуль, то исследование нужно продолжить с помощью первой производной.
Например.

1. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Решение:
1. Находим производную $y' = x^2 - 4x + 3$;
2. Решаем уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, его корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – критические точки;



3. Определяя знак y', находим экстремум; при $x = 1$функция достигает максимума, а при $x = 3$ функция достигает минимума.
4. Находим значение функции в точках экстремума $y(1) = \frac{7}{3}$, $y(3) = 1$.

2. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функцию

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x.$$

Решение:

1.Находим производную $y' = x^2 - 5x + 6;$

2.Решаем уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, его корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ – критические точки;

3.Находим вторую производную $y'' = 2x - 5;$

4.Во вторую производную подставляем поочередно критические значения: $y''(2) = 2\cdot 2 - 5 = -1 < 0$, при $x_1 = 2$ имеем максимум, равный $y(2) = \frac{4}{3}$;

5.Т.к. $y''(3) = 2\cdot 3 - 5 = 1 > 0$, то при $x_2 = 3$ имеем минимум $y(3) = \frac{9}{2}$.

8.3. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;в]$. Тогда она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается на концах отрезка $[a;в]$.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке [а;в] функции:

1. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку $[a;в]$, и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a;в]$, т.е. найти $f(a)$ и $f(в)$.

3. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a;в]$; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

Например. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 3$ на отрезке $[-1;2]$.

Решение:

1. Находим критические точки, принадлежащие интервалу (- 1; 2) и значения функции в этих точках:

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$; $5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$; $5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$;

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$$

Критическая точка $x_3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

2. Вычисляем значения функции в двух других критических точках:

$$y(0) = 3,\ y(1) = 4.$$

3. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка:

$$y(-1) = -8,\ y(2) = -5.$$

4. Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что

$$\max_{[-1,2]} y = y(1) = 4,\quad \min_{[-1,2]} y = y(-1) = -8.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти промежутки монотонности функции:

1) $f(x) = 3x^2 - 8x^3$	2) $y = 16x + 2x^2 - \frac{16x^3}{3} - x^4$
3) $y = x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x$	4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

2. Исследовать на экстремум функции:

1) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120$	2) $y = 3x^4 - 4x^3$
3) $y = 2x^2 - x^4$	4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

3. Найти наибольшее и наименьшее значение следующих функций на указанных отрезках:

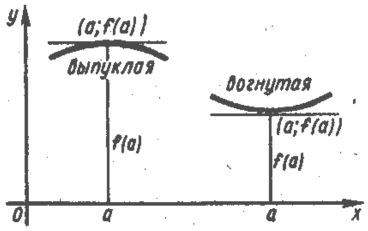
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на $[2;5]$	2) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на $[-2;1]$
3) $y = -2x^2 + x^4 + 5$на $[-2;3]$	4) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на $[-4;3]$

9. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Асимптоты кривой.

Определение: Кривая называется выпуклой в точке $x = a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена под своей касательной в точке $(a; f(a))$.

Кривая называется вогнутой в точке $x = a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена над своей касательной в точке $(a; f(a))$.

Если вторая производная функции $y = f(x)$ в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна – выпукла в этом промежутке.



Для нахождения интервалов выпуклости графика функции пользуются правилом:

1. Находят вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.
2. Определяют интервалы, на которые область определения функции разбивается найденными точками.
3. Устанавливают знаки второй производной в каждом из указанных интервалов. Если $f''(x) < 0$, то в рассматриваемом интервале кривая выпукла; если $f''(x) > 0$ – вогнута.

Например. Найти промежутки выпуклости и вогнутости кривой

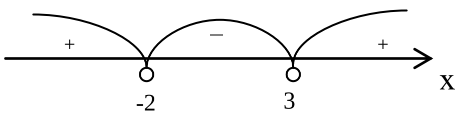
$$y = x^4 - 2x^3 + 36x^2 - x + 7.$$

Решение:

1. Найдем вторую производную: $y' = 4x^3 - 6x^2 + 72x - 1;$

$y'' = 12x^2 - 12x + 72 = 12(x + 2)(x - 3);$ $y'' = 0$ при $x_1 = -2,\ x_2 = 3.$

2. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы:



3. В промежутках $(-\infty;\ -2)$ и $(3;\ +\infty)$ кривая вогнута, т.к. везде в этих промежутках $y'' > 0;$ в промежутке $(-2;\ 3)$ – выпукла, т.к. $y'' < 0.$

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой.

Признак существования точки перегиба: если вторая производная $f''(x)$ непрерывна и меняет знак при переходе через $x = x_0$, то $(x_0;\ f(x))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль, называют критическими точками II рода.

Для нахождения точек перегиба пользуются правилом:

1. Находят вторую производную исследуемой функции $f(x)$.
2. Находят все критические точки II рода из области определения функции.

3.Устанавливают знаки второй производной функции при переходе через критические точки II рода. Изменение знака $f''(x)$ указывает на наличие точки перегиба.
4.Находят ординаты точек перегиба.
Например.

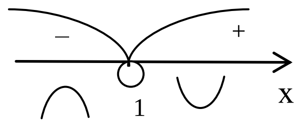
1.Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5.$$

Решение:
1.Определяем первую и вторую производные: $f'(x)= 3x^2- 6x;$

$$f''(x)= 6x – 6 = 6(x – 1).$$

2.Из уравнения $f''(x)=0$ имеем $6(x – 1)= 0,$ т.е. $x = 1$ критическая точка II рода.
1. Если x < 1, то $f''(x)<0$ и в промежутке (-∞; 1) кривая выпукла. Если x > 1, то $f''(x)>0$ и в промежутке (1; ∞) кривая вогнута, а $x = 1$ – абсцисса точки перегиба.



4. При $x = 1$ получим $f(1) =3,$ т.е. М(1; 3) – точка перегиба.

2. Исследовать функцию $y = x^3 – 3x^2 – 9x + 11$ на экстремум и точку перегиба.

Решение:
1. Найдем первую и вторую производные: $f'(x)= 3x^2- 6x – 9 =$ $= 3(x^2- 2x – 3);$ $f''(x)= 6x – 6.$

2. Решаем уравнение $x^2- 2x – 3 = 0,$ его корни $x_1 = -1, x_2 = 3$ – критические точки;

3. Подставив эти значения во вторую производную, получим $f''(- 1)= -12 < 0,$ $f''(3)=12 > 0.$ Следовательно при $x = -1$ функция имеет максимум, а при $x = 3$ – минимум.

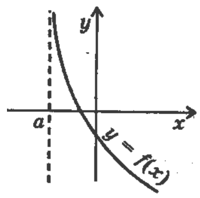
4. Найдем ординаты точек максимума и минимума: $f(- 1) = 16, f(3) = - 16.$ Таким образом, А(- 1; 16) точка максимума, В(3; - 16) – точка минимума.

5. Приравняем вторую производную к нулю: $f''(x)= 6x – 6 = 0,$ откуда $x = 1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах (-∞; 1) и (1; + ∞): $f''(0)= - 6 <0,$ $f''(2)= 6 >0.$ Следовательно, при $x = 1$ график имеет точку перегиба. Найдем ординату точки перегиба: $f(1) = 0;$ С(1;0) – точка перегиба данной кривой.

Асимптоты кривой.

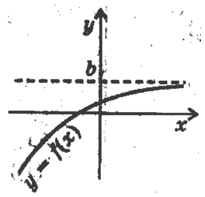
Если график функции *y = f(x)* имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

Асимптотой графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.



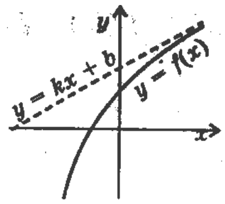
Вертикальная асимптота

$x = a$



Горизонтальная асимптота

$y = в$



Наклонная асимптота

$y = kx + в$

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой***, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$(предел справа) или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$(предел слева) равен бесконечности.

Вертикальные асимптоты кривой следует искать там, где знаменатель функции обращается в нуль.

Прямая $y = в$ является ***горизонтальной асимптотой***, если существуют конечные пределы

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = в$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = в$.

Прямая $y = kx + в$ является ***наклонной асимптотой***, если существуют конечные пределы $k = \lim \dfrac{f(x)}{x}$, $в = \lim (f(x) - kx)$ либо при $x \to \infty$, либо при $x \to -\infty$.

Например. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

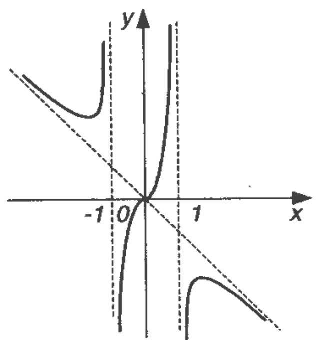
Решение:

Приравняем знаменатель нулю.

Данная функция определена при всех значениях x, кроме $x = 1$ и $x = -1$. Эти точки являются точками разрыва функции. Найдем пределы

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1 - x^2} = \infty.$$

График этой функции имеет две вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = -1$.



Выделяя целую часть функции путем непосредственного деления или с помощью простых преобразований,

получаем $y = \dfrac{x^3}{1-x^2} = \dfrac{x^3 - x + x}{1-x^2} = \dfrac{x(x^2-1)+x}{1-x^2} = -x + \dfrac{x}{1-x^2}$.

Если в правой части уравнения кривой $y = f(x)$ можно выделить линейную часть $y = f(x) = kx + в + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, то прямая $y = kx + в$ является асимптотой.
Заключаем, что прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 2) $y = x^4 - 6x^2 + 5$

3) $y = -x^3 + 3x^2$ 4) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

2. Найти асимптоты кривых:

1) $y = \dfrac{x^2+8x-6}{x}$ 2) $y = \dfrac{6}{x^2-16}$

10. Исследование функций и построение их графиков.

Схема исследования функции и построения её графика:

1) найти область определения функции и определить точки разрыва, если они имеются;
2) исследовать функцию на четность и нечетность;
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить точки пересечения с осями координат, если это возможно;
5) найти критические точки функции;
6) определить промежутки монотонности и экстремумы функции;
7) определить промежутки вогнутости и выпуклости кривой и найти точки перегиба;
8) найти асимптоты графика функции;
9) используя результаты исследования, соединить полученные точки плавной кривой; иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Например. Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить её график.

Решение:

1) функция определена на всей числовой прямой, т.е. D(*y*) = R;

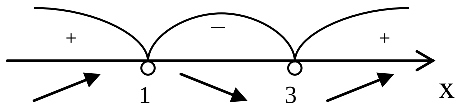
2) $y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) - 3 = -x^3 - 6x^2 - 9x - 3$, функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция не является периодической;

4) найдем точку пересечения графика с осью *ОУ:* полагая $x = 0$, получим $y = -3$; точки пересечения графика с осью *ОХ* в данном случае найти затруднительно.

5) найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; найдем критические точки $f'(x) = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, получим $x = 1$ и $x = 3$ – критические точки.

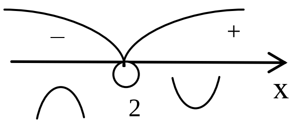
6) в промежутках $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ $y' > 0$, функция возрастает; в промежутке $(1; 3)$ $y' < 0$, функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус,



а при переходе через точку $x = 3$ – с минуса на плюс. Значит

$$y_{max} = y(1) = 1, \quad y_{min} = y(3) = -3.$$

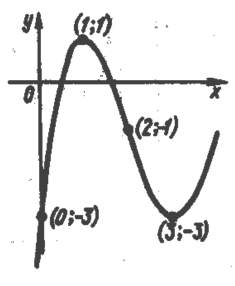
7) найдем вторую производную $y'' = 6x - 12$, $y'' = 0$, $6x - 12 = 0$, $x = 2$;
в промежутке $(-\infty; 2)$ $y'' < 0$, кривая выпукла вверх,
в промежутке $(2; +\infty)$ $y'' > 0$, кривая выпукла вниз.



Получаем точку перегиба (2;-1).

8) график функции асимптот не имеет;

9) используя полученные данные, строим искомый график.



Задания для самостоятельной работы

Исследовать функции и построить их графики:

1. $y = -x^4 + 8x^2 + 9$
2. $y = x^4 - 2x^3 + 6x$
3. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
4. $y = 3x^3 - x$

Контрольная работа

1. Найти производную функции:

1.	$f(x) = 3x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[5]{x^2}}$	10.	$f(x) = \frac{e^x \cos x}{1 + \ln x}$
2.	$f(x) = 5arcsinx + \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}$	11.	$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^5} + \log_2 x\right)\left(e^x - 2\sqrt{x}\right)$
3.	$f(x) = 8x^4 \cdot lnx$	12.	$f(x) = \frac{7^x - 3x}{\sin x}$
4.	$f(x) = (3x^2+1)(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$	13.	$f(x) = \sqrt{x}\, cosx - \frac{1}{x} tgx$
5.	$f(x) = x^{-2}\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$	14.	$f(x) = 4 \cdot 3^x - 6 \cdot x \cdot log_9 x$
6.	$f(x) = \frac{x^2 - \ln x + x}{x^3 + 8x}$	15.	$f(x) = \frac{5^x - 1}{5^x + 2}$
7.	$f(t) = \frac{\sqrt{t^3}\sqrt[3]{t^2}}{t\sqrt{t}}$	16.	$f(x) = 6\sqrt[4]{x^3} - 3\,log_9 x$
8.	$f(x) = (sinx + \frac{1}{3}cosx) \cdot \sqrt[3]{x}$	17.	$f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x\sqrt{x}}$
9.	$f(x) = 5x^2\sqrt{x} + 8sinx$	18.	$f(x) = \frac{\ln x + 4x^2}{e^x}$

2. Найти производную сложной функции:

1.	$f(x) = e^{-x} \ln tgx$	10.	$f(x) = tg^2\left(\frac{\pi}{8} - \sqrt{x}\right)$
2.	$f(x) = \ln\frac{5x - 3}{2x + 7}$	11.	$f(x) = \sqrt{\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}$
3.	$f(x) = \frac{1}{2} \sin arcctg6x$	12.	$f(x) = \cos \ln(2x - x^2)$
4.	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} - \log_4 e^x$	13.	$f(x) = ln^2 lnx$
5.	$f(x) = \frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$	14.	$f(x) = 3^{2x} ctg\, lnx$

6.	$f(x) = 2^{tgx^2} + \frac{2}{5}\pi^2$	15.	$f(x) = 2\sqrt[4]{\arcsin^3 x^2}$
7.	$f(x) = ln\left(\frac{1}{2}x^4 + \sqrt{4+2x^2}\right)$	16.	$f(x) = 10^{2x-x^3} + tg(\ln 2x)$
8.	$f(x) = x^2 \cdot arctg2x + ln\sqrt{x}$	17.	$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}arctgx$
9.	$f(x) = \frac{\ln(2x^2-1)}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$	18.	$f(x) = 4^{ctg^2 x} + \frac{2}{3}\pi^2\sqrt{x}$

3. Найти производную функции в заданной точке:

1. $f(t) = \sqrt[3]{2t-t^2}$, *найти* $f'(4)$	2. $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x}}$, *найти* $f'(1)$
3. $f(t) = \frac{1-t}{2t}$, *найти* $f''(0{,}5)$	4. $f(x) = ln\frac{x}{1-x^4}$, *найти* $f'(2)$
5. $f(x) = 3ctg\, x + ctg^3 x$, *найти* $f'(\frac{\pi}{3})$	6. $f(x) = x\, e^{x^2}$, *найти* $f'(0)$
7. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, *найти* $f''(2)$	8. $f(x) = e^{\sin^2 2x}$, *найти* $f'(\frac{\pi}{8})$
9. $f(t) = ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, *найти* $f'(2)$	10. $f(x) = x\, lnx - x$, *найти* $f'(e^3)$
11. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, *найти* $f'(0)$	12. $f(x) = tg^2 x - ctg^2 x$, *найти* $f'(\frac{\pi}{4})$
13. $f(x) = cos^2\frac{x}{6}$, *найти* $f'(\pi)$	14. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, *найти* $f''(-1)$
15. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x+2^{1-x}}$, *найти* $f'(0)$	16. $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln\cos x$, *найти* $f'(\frac{\pi}{4})$
17. $f(x) = \frac{\cos^2 x - 4x}{2\sin x}$, *найти* $f'(\frac{\pi}{4})$	18. $f(t) = \frac{t}{e^t}$, *найти* $f'(0)$

4. Прямолинейное движение точки описывается законом S(t). Найдите скорость и ускорение в момент времени t.

1.	$S(t) = 0{,}6t^5 + \frac{1}{3}t^3 + t - 10$	$t = 2$	6.	$S(t) = -3t - 0{,}9 + 5t^2 + 11\frac{t^3}{3}$	$t = 2$
2.	$S(t) = 5\sqrt{7} + 3t + 5t^2 + \frac{t^3}{3}$	$t = 5$	7.	$S(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + 3t$	$t = 4$
3.	$S(t) = 2t^3 + 6t + \frac{1}{2}t^4 + 0{,}8$	$t = 3$	8.	$S(t) = \frac{3}{4}t^4 + \frac{5}{4}t^8 + 5\frac{t^3}{3}$	$t = 1$

4.	$S(t) = 0,2\,t^5 + 3\,t^3 – 51 - t$	t = 2	9.	$S(t) = 3\frac{t^2}{2} + 0,4\,t^5 - 2t + 4\frac{t^3}{3}$	t = 2
5.	$S(t) = 12\frac{t^5}{5} - 8\sqrt{3} + 3\frac{1}{2}t^4$	t = 1	10.	$S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2\,t^2 + 5\,t + \frac{1}{5}$	t = 3

5. Написать уравнение касательной к графику функции f (x) в точке с абсциссой x_0.

№	f (x)	x_0	№	f (x)	x_0
1.	$f(x) = 4x^4 – 6x + 1$	$x_0 = -1$	6.	$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 2$	$x_0 = -3$
2.	$f(x) = -3x^2 - 6x - 1$	$x_0 = 3$	7.	$f(x) = – 6x + \frac{5}{4}x^2 + 10$	$x_0 = -2$
3.	$f(x) = 2x^4 + x^3 – 4x$	$x_0 = 2$	8.	$f(x) = 2 + \cos x - \sin x$	$x_0 = \frac{\pi}{2}$
4.	$f(x) = 3x^3 + 12x + 7$	$x_0 = 1$	9.	$f(x) = 9 + 8x^2 - \frac{1}{3}x^3$	$x_0 = 1$
5.	$f(x) = 4x^2 – 2x^3 – 2x$	$x_0 = 2$	10.	$f(x) = 5x^3 – 4x^2 - 1$	$x_0 = -1$

6. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции:

1.	$f(x) = 3x^4 - 4x^3 – 12x^2 + 8\sqrt{3}$	6.	$f(x) = 2x^3 – 3x^2 - 12x + 1$
2.	$f(x) = -2x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{9}{4}$	7.	$f(x) = (x – 1)^3 - 3(x – 1)$
3.	$f(x) = \frac{4x^3 - x^4}{9}$	8.	$f(x) = 3x^5 – 5x^3 - 30x$
4.	$f(x) = (x + 1)^3 - 27(x + 1)$	9.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2 - 6$
5.	$f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3 + 2\sqrt{2}$	10.	$f(x) = 0,8x^5 – x^4 + 4x^3$

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

№	f (x)	[a;b]	№	f (x)	[a;b]
1.	$f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$	[- 2; 2]	6.	$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$	[- 1; 2]

2.	$f(x) = x^4 - 4x^3 - 3$	[- 1; 5]	7.	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$	[- 1; 1]
3.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$	[- 1; 4]	8.	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$	[- 1; 1]
4.	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$	[- 1; 3]	9.	$f(x) = 2x^4 - 8x + \frac{1}{2}$	[- 2; 1]
5.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 + 2$	[- 3; 1]	10.	$f(x) = 5 + 12x - x^3$	[- 3; 0]

8. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции:

1.	$f(x) = 4x^4 - \frac{16}{3}x^3$	6.	$f(x) = x^3 - 3x - 5$
2.	$f(x) = 3x^2 - x^3$	7.	$f(x) = x^4 - 4x^3$
3.	$f(x) = x^3 - 9x$	8.	$f(x) = 6x - 2x^3$
4.	$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x - 1\frac{1}{3}$	9.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$
5.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$	10.	$f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x^4$

9. Исследуйте функции и постройте их графики:

1.	$f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$	6.	$f(x) = 4x^2 - 2x^4$
2.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$	7.	$f(x) = -x^2(x^2 - 4)$
3.	$f(x) = -\frac{t^4}{4} + x^2$	8.	$f(x) = 2x^3 - 6x^2$
4.	$f(x) = \frac{t^3}{3} + 3x^2$	9.	$f(x) = -4x^3 + 12x$
5.	$f(x) = x^3 - 6x$	10.	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$

Используемая литература:

1. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., и др. Алгебра и начала анализа (10-11 кл.) – М., Просвещение., 1997.
2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М., Высшая школа, 2000.
3. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.,1989.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М., 1977.
5. Рогов А.Т. Задачник по высшей математике для техникумов. – М., Высшая школа, 1973.
6. Филимонова Е. В. Математика, Ростов – на – Дону, Феникс, 2003.
7. Богомолов Н.В. Математика: Учеб. для ссузов. – М.: Дрофа, 2004.
8. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике: Учеб.пообие – М.: Высш.шк., 1999.
9. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. М., 1991.
10. Пехлецкий И.Д. Математика. М., 2003.
11. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Минск, 2003.